Kapitel 1: Logik

Über mich

- Markus, 20 Jahre alt, aus Schwäbisch Hall
- Informatik BSc 100%, mit Anwendungsgebiet Mathe
- jetzt im 7. Semester

Bitte duzt mich einfach!

Falls ihr mich kontaktieren wollt:

- markus.everling@stud.uni-heidelberg.de
- @markuseverling auf Discord

Diese Slides orientieren sich am Vorkursskript, sind aber kompakter gehalten. Schaut also bei Unklarheiten gerne nochmal im Skript nach.

Die Nummern auf den Slides stimmen mit denen im Skript überein.

Ansonsten dürft ihr natürlich jederzeit Fragen stellen (während des Vortrags und in den Tutorien).

Motivation

Mathe an der Uni verläuft anders als an der Schule!

$\rightsquigarrow$ Schwerpunkt auf Beweisen, nicht auf Rechnen.
(Gilt auch für Informatiker!)

Logik bildet das für Beweisführung nötige Fundament.

Die Beweisführung selbst lernt ihr dann morgen.

Nachher solltet ihr z.B. solche Ausdrücke verstehen können:

$$\forall x \in \mathbb{R} : (x \geq 0) \leftrightarrow \left(\exists! y \in \mathbb{R}_{\geq 0} : y^2 = x\right)$$

Übersicht

Zentrale Themen für heute:

- Grundlagen über Variablen und Terme
- Bausteine der Aussagenlogik
- Bausteine der Prädikatenlogik
- Interpretationen und Erfüllbarkeit

§1.1 Variablen und Terme

§1.1.1 **Definition** *(Objekte und Typen).* Als **mathematische Objekte** werden alle abstrakten Entitäten bezeichnet, mit denen sich Mathematiker beschäftigen wollen, z.B.

- Zahlen $\left(1, \sqrt{5}, \log(\pi) \cdot i, \ldots\right)$
- Polynome $(x^2 + 1, x^2 y - y^2 x, \ldots)$
- Geometrische Konstrukte (Punkte, Geraden, ...)
- Mengen $(\emptyset, \mathbb{R}, \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \ldots)$
- etc.

Oft ist es hilfreich, Objekten verschiedene **Typen** zuzuordnen. Dabei können Objekte je nach Kontext verschiedene Typen annehmen.

Beispielsweise kann 1 eine reelle Zahl, eine ganze Zahl, ein Polynom von Grad 0, etc., sein, je nachdem was gerade passt.

$\rightsquigarrow$ Diese Definitionen sind erstmal recht vage, aber keine Sorge, auf euch kommt noch genügend Rigor zu.

§1.1.2 **Definition** *(Variable).* Eine **Variable** ist ein Platzhalter, an dessen Stelle Objekte eines gewissen Typs eingesetzt werden können. Dieser heißt *Typ der Variable*.

§1.1.3 **Notation.** Oft verwenden wir den Konjunktiv („Sei n eine natürliche Zahl“), um auszudrücken „n ist eine Variable vom Typen natürliche Zahl“.

Prinzipiell sind alle Symbole, denen noch keine Bedeutung zugeteilt wurde, valide Variablennamen.

Es gibt allerdings einige Konventionen (z.B. Großbuchstaben für Mengen, Kleinbuchstaben für deren Elemente), die euch oft begegnen werden.

§1.1.4 **Bemerkung.** Einige Grundregeln zu Variablen:

- Gleiche Variablen bezeichnen gleiche Objekte. In $x^2 - 2x$ muss für beide x der gleiche Wert eingesetzt werden.
- Verschiedene Variablen dürfen das gleiche Objekt bezeichnen. „Seien x, y zwei Zahlen" schließt nicht den Fall $x = y$ aus.
- Ihr müsst Variablen immer vor Verwendung deklarieren! Also immer z.B. „Sei x …" schreiben, bevor ihr x irgendwo verwendet.

§1.1.5 **Definition** *(Cantorsche Mengendefinition).*

„Unter einer **Menge** M verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen." - Georg Cantor, 1895

Die Formalisierung von Mengen ist Aufgabe der *Mengenlehre*. Sie ist Thema des Vortrags am Freitag.

§1.1.6 **Notation** *(Elementzeichen).* Sind M eine Menge und a ein Objekt, so schreibt man

$$\begin{array}{lll} a \in M & \text{für} & \text{„}a \text{ ist ein Element von } M\text{“} \\ a \notin M & \text{für} & \text{„}a \text{ ist kein Element von } M\text{“} \end{array}$$

§1.1.7 **Beispiel** *(Zahlenbereiche).* Man notiert

- $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.
- $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen.
- $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen.
- $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.
- $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen.

Dann gilt beispielsweise $-3 \in \mathbb{Z}$ und $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$, aber $-3 \notin \mathbb{N}$ und $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

§1.1.9 **Definition** *(Term).* Seien $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n$ Variablen und T ein Typ. Ein **Term vom Typ** T in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ ist ein sprachliches Gebilde t, das nach Einsetzung von Objekten in $x_1, \dots, x_n$ selbst ein Objekt vom Typen T bezeichnet.

Um hervorzuheben, dass t ein Term in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ ist, schreiben wir auch $t(x_1, \dots, x_n)$.

§1.1.10 **Beispiel.**

(1) Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $x^2 + 3xy - y^3$ ein Term vom Typen „reelle Zahl“ in den Variablen x und y.

Setzen wir z.B. $x = 3$ und $y = 2$ ein, erhalten wir den Zahlenwert 19.

(2) Sei m eine Variable vom Typen „Mensch“. Dann ist „Das Alter von m“ ein Term vom Typen „ganze Zahl“ in der Variablen m.

Setzt man z.B. $m =$ „Markus“ ein, nimmt der Ausdruck den Wert 20 an.

§1.1.11 **Notation** *(Klammersetzung).* Bei komplizierteren verschachtelten Ausdrücken wie z.B.

$$(x_1 + (x_2 \cdot x_3)) + (x_4 \cdot ((x_5 + x_6) \cdot (x_7 + x_8)))$$

werden Klammern benötigt, um die Reihenfolge der Operationen klarzustellen.

Um die Menge an nötigen Klammern zu reduzieren, verwenden wir Konventionen wie z.B. „Punkt vor Strich“. Damit sieht der obige Term wiefolgt aus:

$$x_1 + x_2 x_3 + x_4(x_5 + x_6)(x_7 + x_8)$$

Lieber zu viele Klammern setzen als zu wenige!

§1.1.12 **Notation** *(:=).* Oft wollen wir mehrfach den gleichen Term verwenden, ohne in jedes Mal vollständig aufschreiben zu müssen.

Mit dem Definitionszeichen := können wir diese z.B. folgendermaßen abkürzen:

$$y(x) := 2x^2 - 3x$$
$$\alpha := \pi + e$$

Lies:

- „Sei y der Term $2x^2 - 3x$ in der Variablen x."
- „Sei α definiert als die Summe von π und e."

§1.2 Bausteine der Aussagenlogik

§1.2.1 **Definition** *(Aussage)*. Eine **Aussage** ist ein sprachliches Gebilde, dem ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann.

§1.2.2 **Beispiel**. Sätze wie z.B.

$$B_1 := \text{„Der Döner wurde in Deutschland erfunden.“}$$
$$B_2 := \text{„Heute ist Mittwoch.“}$$
$$B_3 := \text{„Die Relativitätstheorie ist fehlerhaft.“}$$

sind valide Aussagen.

Sätze ohne Wahrheitswert, z.B. „Frohe Weihnachten!“ sind keine Aussagen.

§1.2.3 **Definition** *(Junktor).* Eine Operation, die aus einer Handvoll Aussagen eine neue Aussage produziert, heißt **Junktor** oder **logischer Operator**.

Im Folgenden werden die gebräuchlichen Junktoren präsentiert.

§1.2.4 **Definition** *(Und-Verknüpfung).* Zwei Aussagen A, B können zu ihrer **Konjunktion**

$$A \wedge B \qquad \text{(lies: „}A\text{ und }B\text{“)}$$

verknüpft werden, die bedeutet, dass A und B beide zutreffen.

§1.2.5 **Beispiel.**

$B_1 \wedge B_2 =$ „Der Döner wurde in Deutschland erfunden und heute ist Mittwoch.“

$B_2 \wedge B_3 =$ „Obwohl heute Mittwoch ist, ist die Relativitätstheorie fehlerhaft.“

$\rightsquigarrow$ Die Konjunktion zweier Aussagen muss nicht immer das Wort „und“ beinhalten.

§1.2.6 **Definition** *(Oder-Verknüpfung).* Zwei Aussagen A, B können zu ihrer **Disjunktion**

$$A \vee B \qquad \text{(lies: „}A\text{ oder }B\text{")}$$

verknüpft werden, die bedeutet, dass mindestens eine der Aussagen A und B zutrifft.

§1.2.7 **Beispiel.**

$B_1 \vee B_2 =$ „Heute ist Mittwoch, oder der Döner wurde in Deutschland erfunden."

$B_3 \vee B_2 =$ „Sofern die Relativitätstheorie stimmt, ist heute Mittwoch."

$\rightsquigarrow$ Hier wurde die Disjunktion sprachlich als Implikation ausgedrückt.

§1.2.11 **Definition** *(Negation)*. Für eine Aussage A notieren wir die **Negation** von A mit

$$\neg A \qquad \text{(lies: „nicht } A\text{“).}$$

Sie besagt, dass A nicht zutrifft.

Manchmal wird die Negation auch mit $\overline{A}$ notiert.

§1.2.12 **Beispiel**.

$\neg B_1 =$ „Der Döner wurde außerhalb von Deutschland erfunden.“

$\neg B_2 =$ „Heute ist nicht Mittwoch.“

$\neg B_3 =$ „Die Relativitätstheorie stimmt.“

§1.2.13 **Definition** *(Implikation)*. Zwei Aussagen A, B können zur **Implikation**

$$A \to B \qquad \text{(lies: „}A\text{ impliziert }B\text{“)}$$

verknüpft werden, die bedeutet, dass B aus A folgt.

Der Pfeil $\to$ heißt **Implikationspfeil** und die Aussage $A \to B$ heißt **Konditional**.

§1.2.14 **Beispiel**.
$B_1 \to B_2 =$ „Sofern der Döner in Deutschland erfunden wurde, ist heute Mittwoch.“

§1.2.16 **Definition** *(Äquivalenz)*. Zwei Aussagen A, B können zur **Äquivalenz**

$$A \leftrightarrow B \qquad \text{(lies: „}A\text{ äquivalent zu }B\text{“)}$$

verknüpft werden, die bedeutet, dass sich A und B gegenseitig implizieren.

Der Pfeil $\leftrightarrow$ heißt **Äquivalenzpfeil** und die Aussage $A \leftrightarrow B$ heißt **Bikonditional**.

§1.2.17 **Beispiel**.

„$x \in \mathbb{R}$ ist negativ, gdw. $-x$ positiv ist.“

$B_2 \leftrightarrow B_3 =$ „Heute ist dann und nur dann Mittwoch, wenn die Relativitätstheorie fehlerhaft ist.“

Übersicht Junktoren

Seien A, B zwei Aussagen. Es gilt folgende Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Wenn wir also z.B. wissen, dass A wahr und B falsch ist, können wir in der zweiten Zeile auslesen, dass auch $A \to B$ falsch ist.

Aufgabe

Wandelt diese sprachlichen Ausdrücke in logische Formeln aus geeigneten Teilaussagen um:

(1) Wenn es nicht regnet, gehe ich wandern.

(2) Wenn es nicht regnet und ich nicht wandern gehe, muss ich krank sein.

Übersetzt folgende logischen Formeln in Deutsch:

(3) $(x \in \mathbb{Z}) \leftrightarrow (x^2 \in \mathbb{Z})$ (für eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$)

(4) $((A \to B) \land \neg B) \to \neg A$ (für Aussagen A, B)

(Beispiel-) Lösungen

Seien $A :=$ „Heute regnet es“, $B :=$ „Ich gehe wandern“, $C :=$ „Ich bin krank“.

(1) $\neg A \to B$

(2) $(\neg A \wedge \neg B) \to C$

(3) Eine rationale Zahl x ist genau dann eine ganze Zahl, wenn ihr Quadrat eine ganze Zahl ist.

(4) Wenn aus der Aussage A die Aussage B folgt, und zudem B falsch ist, dann ist auch A falsch.

(Modus tollens, lernt ihr wahrscheinlich morgen nochmal)

§1.3 Bausteine der Prädikatenlogik

§1.3.1 **Definition** *(Prädikat).* Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein n**-stelliges Prädikat** ist ein Term vom Typ „Aussage“ in n Variablen.

- 1-stellige Prädikate nennen wir **Eigenschaften**.
- Ist $n \geq 2$, sprechen wir von n**-stelligen Relationen**.

  $\rightsquigarrow$ Für $n = 2$ sagen wir oft einfach nur „Relationen“.
- Ein 0-stelliges Prädikat ist einfach eine Aussage.

§1.3.2 **Beispiel** *(Eigenschaften).*

(1) $G(m) :=$ „m ist eine gerade Zahl“, wobei $m \in \mathbb{Z}$.

- $G(2) =$ „2 ist eine gerade Zahl.“
- $G(1) =$ „1 ist eine gerade Zahl.“

(2) $E(X) :=$ „X wurde in Deutschland erfunden“, wobei X vom Typen „Gericht“ ist.

- $E($„Döner“$) =$ „Döner wurde in Deutschland erfunden“.
- $E($„Pizza“$) =$ „Pizza wurde in Deutschland erfunden“.

§1.3.3 **Beispiel** *(Relationen).*

(1) $(<)(x, y) :=$ „x ist kleiner als y", mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Kurz: $x < y$.

(2) $A(X, Y) :=$ „X ist älter als Y", wobei X, Y Variablen vom Typen „Mensch" sind.

(3) $E(X, Y) :=$ „X wurde in Y erfunden", wobei X vom Typen „Gericht", und Y vom Typen „Land" ist.

§1.3.4 **Notation** *(Extension).* Sei $E(x)$ eine Eigenschaft. Dann bezeichnet

$$\{x \mid E(x)\} \qquad \text{oder} \qquad \{x : E(x)\}$$

die Menge aller Objekte vom Typen von x, die die Eigenschaft E besitzen.

Sie heißt die **Extension** der Eigenschaft E.

§1.3.5 **Beispiel.**

- $\{M \mid M \text{ ist Mensch}\} = \{\text{„Markus“}, \ldots\}$ ist die Menge aller Menschen.
- $\{n : n \text{ ist prim}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ ist die Menge aller Primzahlen. Sie ist Teilmenge von $\mathbb{N}$.

Quantoren

§1.3.7 **Definition** *(Allaussage).* Sei $E(x)$ eine Eigenschaft. Dann lässt sich die **Allaussage**

$$\forall x : E(x) \qquad \text{(lies: „Für jedes } x \text{ gilt } E(x)\text{“)}$$

formen, die aussagt, dass *jedes* Objekt vom Typen von x die Eigenschaft E besitzt.

Das Zeichen $\forall$ heißt **Allquantor**.

Für eine Menge M von Objekten vom Typen von x schreiben wir auch

$$\forall x \in M : E(x) \qquad :\Leftrightarrow \qquad \forall x : (x \in M \to E(x))$$

Lies: „Für jedes $x \in M$ gilt $E(x)$.“

§1.3.9 **Definition** *(Existenzaussage).* Sei $E(x)$ eine Eigenschaft. Dann lässt sich die **Existenzaussage**

$$\exists x : E(x) \qquad \text{(lies: „Für mind. ein } x \text{ gilt } E(x)\text{“)}$$

formen, die aussagt, dass es *mindestens ein* Objekt vom Typen von x mit der Eigenschaft E gibt.

Das Zeichen $\exists$ heißt **Existenzquantor**.

Für eine Menge M von Objekten vom Typen von x schreiben wir auch

$$\exists x \in M : E(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists x : (x \in M \wedge E(x))$$

Lies: „Für mindestens ein $x \in M$ gilt $E(x)$.“

§1.3.11 **Notation.** Für die Negation einer Existenzaussage verwenden wir das Symbol $\nexists$. Für eine Aussage $E(x)$ gilt also

$$\neg(\exists x : E(x)) \qquad \Leftrightarrow: \qquad \nexists x : E(x)$$

Lies: „Es existiert kein x, sodass $E(x)$ gilt."

Ebenso schreiben wir $\nexists x \in M : E(x)$ anstelle von $\neg(\exists x \in M : E(x))$.

Für den Allquantor gibt es kein solches Pendant!

§1.3.17 **Definition** *(Eindeutigkeitsaussage).* Sei $E(x)$ eine Eigenschaft. Dann lässt sich die **Eindeutigkeitsaussage**

$$\exists! x : E(x) \qquad\qquad \text{(lies: „Für genau ein } x \text{ gilt } E(x)\text{“)}$$

formen, die aussagt, dass es *genau ein* Objekt vom Typen von x mit der Eigenschaft E gibt.

Das Zeichen $\exists!$ heißt **Eindeutigkeitsquantor**.

Für eine Menge M von Objekten vom Typen von x schreiben wir auch

$$\exists! x \in M : E(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists! x : (x \in M \wedge E(x))$$

Lies: „Für genau ein $x \in M$ gilt $E(x)$.“

§1.3.19 **Bemerkung.** Der Eindeutigkeitsquantor kann für eine Aussage $E(x)$ mithilfe der „=“ Relation über Existenzquantor und Allquantor definiert werden:

$$\exists! x : E(x) \qquad :\Leftrightarrow \qquad \exists x : E(x) \wedge \forall y : (E(y) \rightarrow x = y)$$

Lies: „Es existiert ein x mit Eigenschaft E, und alle y mit Eigenschaft E sind gleich zu x“.

§1.3.20 **Notation.** Sei $E(x)$ eine Eigenschaft, sodass $\exists! x : E(x)$ gilt. Dann ist durch E genau ein Objekt a definiert, das $E(a)$ erfüllt.

Wir sagen z.B. „Sei a das Objekt, das die Eigenschaft E besitzt."

§1.3.21 **Beispiel.**

- Die Kreiszahl π lässt sich z.B. wiefolgt definieren:

  Sei π die kleinste positive Nullstelle der Sinusfunktion.

  Dabei muss im Vorfeld sichergestellt werden, dass $\sin$ überhaupt eine Nullstelle hat.

- Eine mögliche Definition der Fibonacci-Zahlen:

  Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Zahlenfolge, für die $F_1 = 0, F_2 = 1$, und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

§1.3.8 **Beispiel** *(Allaussagen).*

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{C} : z^2 = x$

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x < 0 \leftrightarrow y < 0) \rightarrow (xy \geq 0)$

(3) $\forall x \in \mathbb{R} : (x \geq 0) \leftrightarrow (\exists! y \in \mathbb{R}_{\geq 0} : y^2 = x)$

§1.3.10 **Beispiel** *(Existenzaussagen).*

(4) $\exists x \in \mathbb{R}\ : (\nexists y \in \mathbb{R} : y^2 = x)$

(5) $\exists \text{Mensch } M \in \{\text{Anwesende}\} : M \text{ heißt Markus}$

§1.3.18 **Beispiel** *(Eindeutigkeitsaussagen).*

(6) $\exists! x \in \mathbb{R} : x = -x$

(7) $\exists! x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : xy = y$

Könnt ihr diese Aussagen in Deutsch übersetzen?

(Beispiel-) Lösungen

(1) Für jede reelle Zahl x existiert mind. eine komplexe Zahl z, deren Quadrat x ist.

(2) Für reelle Zahlen x, y ist das Produkt xy nicht negativ, wenn x und y entweder beide negativ oder beide nicht negativ sind.

(3) Eine reelle Zahl x ist genau dann nicht negativ, wenn es genau eine nichtnegative reelle Zahl y gibt, deren Quadrat x ist.

(4) Es gibt eine reelle Zahl x, die keine Quadratwurzel y hat.

(5) Mind. einer der Anwesenden heißt Markus.

(6) Es gibt genau eine reelle Zahl x, für die $x = -x$ gilt.

(7) Es gibt genau eine reelle Zahl x, sodass für jedes reelle y das Produkt xy gleich y ist.

Übersicht Quantoren

Symbol	**Name**	**Bedeutung**
$\forall x$	Allquantor	„Für alle x gilt …“
$\exists x$	Existenzquantor	„Für mindestens ein x gilt …“
$\exists! x$	Eindeutigkeitsquantor	„Für genau ein x gilt …“

§1.4 Interpretationen

§1.4.2 **Definition** *(Interpretation).* Sei X eine Aussage. Eine **(bivalente) Interpretation** von X ist eine Zuweisung der Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ zu X.

Diese muss einige Regeln befolgen:

- Falls sich X mittels Junktoren $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ aus anderen Aussagen zusammensetzt, leitet sich der Wahrheitswert aus der vorhin gezeigten Wahrheitstafel ab.
- $\forall x : E(x)$ ist als wahr zu interpretieren, gdw. für alle Objekte a vom Typen von x die Eigenschaft $E(a)$ als wahr interpretiert ist.
- $\exists x : E(x)$ ist als wahr zu interpretieren, gdw. für mindestens ein Objekt a vom Typen von x die Eigenschaft $E(a)$ als wahr interpretiert ist.

§1.4.5 **Definition.** Eine Aussage heißt

- **Tautologie/allgemeingültig**, wenn sie unter jeder Interpretation wahr ist.
- **erfüllbar**, wenn sie unter mind. einer möglichen Interpretation wahr ist.
- **unerfüllbar**, wenn sie unter keiner möglichen Interpretation wahr ist.

§1.4.6 **Beispiel.**

(1) Die Aussage „Heute ist Mittwoch“ ist erfüllbar, aber keine Tautologie.

(2) Für Aussagen A, B sind $A \to A$, $A \vee \neg A$, $A \to (A \vee B)$ Tautologien.

(3) Für Aussagen A, B sind $A \leftrightarrow \neg A$, $A \wedge \neg A$, $A \nleftrightarrow (A \vee B)$ unerfüllbar.

§1.4.7 **Satz.** Seien A, B Aussagen. Es gilt:

(1) A ist unerfüllbar gdw. $\neg A$ eine Tautologie ist.

(2) $A \leftrightarrow B$ ist eine Tautologie gdw. A und B unter jeder Interpretation den selben Wahrheitswert haben.

(3) $A \to B$ ist eine Tautologie gdw. bei allen Interpretationen, bei denen A wahr ist, auch B wahr ist. Interpretationen, bei denen A falsch ist, sind irrelevant.

§1.4.8 **Beweis.** Man betrachte folgende Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	f	w
f	f	w	w	w

(1) Unter einer festen Interpretation ist A genau dann wahr, wenn $\neg A$ falsch ist. Folglich ist A genau dann immer falsch, wenn $\neg A$ immer richtig ist.

(2) Unter einer festen Interpretation ist $A \leftrightarrow B$ genau dann wahr, wenn A und B den gleichen Wert haben. Genau dann, wenn dies immer gilt, ist $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie.

A	B	$\neg A$	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	f	w
f	f	w	w	w

(3) Offenbar ist $A \to B$ eine Tautologie gdw. der Fall $A \wedge \neg B$ nie eintritt. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass in jeder Interpretation, in der A wahr ist, auch B wahr ist.

$\square$

Aufgabe

Seien A, B Aussagen. Berechnet abhängig von den Wahrheitswerten von A, B den Wahrheitswert von

$$(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$$

Verwendet dafür eine Wahrheitstafel folgender Form:

A	B	$A \land B$	$\leftrightarrow$	$\neg A \lor B$
w	w			
w	f			
f	w			
f	f			

Lösung

A	B	$A \wedge B$	$\leftrightarrow$	$\neg A \vee B$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	f	f	w
f	f	f	f	w

Also:

A	B	$(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \vee B)$
w	w	w
w	f	w
f	w	f
f	f	f

Folglich gilt:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee B) \qquad \Leftrightarrow \qquad A$$

Zusammenfassung

Wichtigste Takeaways für heute:

- Objekte, Variablen, Terme, Mengen
- Aussagen, Junktoren
  - Konjunktion, Disjunktion, Negation, Implikation, Äquivalenz
- Prädikate, Quantoren
  - Eigenschaften, Relationen
  - Quantoren
    - Allquantor, Existenzquantor, Eindeutigkeitsquantor
- Interpretationen
  - Tautologien, (Un-) Erfüllbarkeit
  - Wahrheitstafeln