Kapitel 7: Ausblick auf die Analysis

Peter Zöllner

11.10.2024

7.1.2 Satz: Rechenregeln für Ungleichungen

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind mit $\leq$ und $\geq$ totalgeordnete Körper

Wdh: Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$:

- $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \leq x$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x \leq y \text{ und } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x \leq y \text{ und } y \leq x) \Longrightarrow x = y$

Neu:

7.1.2 Satz: Rechenregeln für Ungleichungen

Für $x, y, a, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $x \leq y \Leftrightarrow x - a \leq y - a$
2. $x \leq y \Leftrightarrow \lambda \cdot x \leq \lambda \cdot y \quad (\text{für } \lambda > 0)$
3. $x \leq y \Leftrightarrow \frac{x}{\lambda} \leq \frac{y}{\lambda} \quad (\text{für } \lambda > 0)$
4. $x \leq y \Leftrightarrow \lambda \cdot y \leq \lambda \cdot x \quad (\text{für } \lambda < 0)$
5. $x \leq y \Leftrightarrow \frac{y}{\lambda} \leq \frac{x}{\lambda} \quad (\text{für } \lambda < 0)$
6. $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$
7. $x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \quad (\text{für } x, y > 0)$

7.1.4 Beispiel

Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$:

7.1.6 Definition: Betrag und Signum

Für $a \in \mathbb{R}$ ist der <u>Betrag</u> $|\cdot|$ definiert als:

Das <u>Signum</u> ist definiert als:

7.1.8 Bemerkung: Rechenregeln für Signum und Betrag

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $x = \operatorname{sgn}(x)\,|x|$
2. $|x| = \operatorname{sgn}(x)\,x$
3. $|x| \geq 0$
4. $x \leq |x|$
5. $|x| = |-x|$
6. $\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y)$

7.2.2 Definition: Metrik

Sei X eine Menge. Eine Funktion $d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Metrik oder Abstandsfunktion, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

Das Paar (X,d) aus Menge und Abstandsfunktion bezeichnet man als metrischen Raum.

7.2.2 Definition: Abstand in $\mathbb{R}$

Die Standardmetrik $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf $\mathbb{R}$ ist definiert als:

7.2.7 Beispiele für weitere Metriken

- Auf $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert man die euklidische Metrik:

- Auf einer Menge X wird die diskrete Metrik definiert als:

7.2.8 Definition: offener Ball

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $a \in X$. Für $r \in R_{\geq 0}$ heißt die Menge:

der offene Ball um a mit Radius r.

7.2.9 Beispiele für offene Bälle

- Auf $\mathbb{R}^3$ mit der euklidischen Metrik ist der offene Ball um $a \in \mathbb{R}^3$ mit Radius $r \in R_{\geq 0}$:

- Auf einer Menge X mit der diskreten Metrik ist der offene Ball um $a \in \mathbb{R}^3$ mit Radius $r \in R_{\geq 0}$:

7.2.11 Definition: offene Menge und Umgebung

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Die Menge U $\subseteq X$ heißt offen, falls:

Für $a \in U$ heißt U eine Umgebung von a, falls:

A heißt dann ein innerer Punkt von U

7.3.1 Bemerkung: Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

7.3.2 Definition: Folge

Sei A eine Menge. Eine A-wertige Folge ist definiert als

Die Menge aller A-wertigen Folgen ist gegeben durch:

Die Aussage: eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt die Eigenschaft E für hinreichend große n bedeutet:

7.3.3 Notation: Definieren von Folgen

Eine Folge lässt sich über eine exakte Definitionsvorschrift definieren:

durch Auflistung einiger Elemente:

oder rekursiv:

7.3.5 Beispiele für einige Folgen

- Die Folge der Primzahlen:

- Die „alternierende Folge“:

- Die Fibonacci-Folge:

7.3.6 Definition: Beschränktheit

Eine reell-wertige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heißt nach oben beschränkt, falls:

Und nach unten beschränkt, falls:

Ist eine Folge nach oben und unten beschränkt heißt sie beschränkt, sonst unbeschränkt.

7.3.6 Definition: Monotonie

Eine reell-wertige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend (fallend), falls

Sie heißt streng monoton wachsend (fallend), falls

7.3.9 Beispiel

Die Folge $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist

7.4.2 Definition: Konvergenz

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a \in X$
konvergiert gegen a, falls:

Man schreibt:

Anschaulich bedeutet das:

7.4.3 Äquivalenz der Konvergenzbegriffe

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a \in$ X, dann sind äquivalent:

i. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a
ii. Für jede Umgebung $U \subseteq X$ liegen alle Folgenglieder für hinreichend große n in U

7.4.3 Äquivalenz der Konvergenzbegriffe

7.4.5 Beispiel

Die Folge $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1:

7.5.1 Rechenregeln für Grenzwerte

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zwei <u>konvergente</u> Folgen mit $a := lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := lim_{n\to\infty} b_n$, dann gilt:

7.5.3 Beispiel

Die Folge $\left(1 + \frac{3n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist