Vorkurs Mathematik
Logik und Beweise II

Dario Weißmann

5. Oktober 2016

Diese Arbeit basiert in Teilen auf dem Beweis-Vortrag von Bärbel Jansen und Winnifred Wollner, in bearbeiteter Fassung von Casper Goch. Der Vortrag in seiner jetzigen Gestalt wurde größtenteils von Axel Wagner übernommen, und von Eike Fokken und Philip Bell überarbeitet.

Sie steht unter der freien `CC-BY-SA-DE 3.0` Lizenz.

Für weitere Informationen besuchen Sie

http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.de

Sätze und Beweise

Zur Wiederholung machen wir uns noch einmal klar, wie die allgemeine Struktur eines Satzes aussieht: Für gewöhnlich hat ein mathematischer Satz die grobe Struktur

$$P \Rightarrow K.$$

Es soll also gelten, dass aus einer (meistens zusammengesetzten) Aussage P (die „Prämisse", oder „Voraussetzung") eine andere (manchmal zusammengesetzte) Aussage K (die „Konklusion", oder „Folgerung") folgt, dass also wenn P wahr ist, auch K wahr sein muss.
Ein Beweis ist ein Gedankengang, der uns klarmacht, wieso ein Satz richtig sein muss. Um seine Gedanken zu ordnen bzw. beim Aufschreiben des Beweises nicht den ganzen Regenwald zu verschleißen, bietet es sich an, Abkürzungen zu verwenden. Eine solche Abkürzung nennt man Definition, wie zum Beispiel:

Definition 1. *Wir nennen eine ganze Zahl n* ***gerade****, wenn es eine ganze Zahl m gibt, sodass $n = 2m$.*

Jetzt können wir also "*sei n gerade*" statt "*Gebe es eine ganze Zahl m mit $n = 2m$*" schreiben.
Ein weiteres Hilfsmittel, um einen Beweis übersichtlicher zu machen, ist das sogenannte Lemma. Ein Lemma ist ein Hilfssatz, den man im Zuge eines Beweises braucht und den man separat beweist. Ein Beispiel gibt es später.
Die Voraussetzungen und Folgerungen eines Satzes zu identifizieren ist ein wichtiger Schritt zu einem sauberen Beweis. Gerade in den ersten Semestern führt ein genaues Aufführen der Vorraussetzungen eines Satzes, gemeinsam mit ein paar einfachen Definitionen und alten Sätzen ziemlich direkt zur Folgerung. Deswegen ist es zu Beginn des Studiums noch empfehlenswert die Voraussetzungen getrennt aufzuführen.

Beweistechniken

Beim Führen eines Beweis verwenden wir bestimmte Regeln, auch *Schlussfiguren* genannt. Es gibt vier grundlegende Beweistechniken, die sich darin unterscheiden, ob und welche besondere Schlussfigur verwendet wird, um den Beweis zu vollziehen:

- Direkter Beweis ohne besondere Schlussfigur.
- Gegenbeispiel: wenn man zeigen will, dass eine für-alle Aussage falsch ist, genügt es ein Gegenbeispiel anzugeben.
- Indirekter Beweis mit $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- Widerspruchsbeweis mit $(\neg A \Rightarrow f) \Rightarrow A$

Da wir wissen, dass $f \Leftrightarrow (B \wedge \neg B)$ für eine beliebige Aussage B gilt, können wir die letzte Schlussfigur auch durch $(\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Rightarrow A$ ersetzen.

Oft wird in einem Beweis eine bereits bewiesene Aussage, also ein Satz oder Lemma, verwendet. Wenn man $P \Rightarrow K$ schon bewiesen hat, zeigt man die Prämisse P und verweist darauf, dass $P \Rightarrow K$ gilt. Damit darf man dann auf K schließen. Dies wird etwas formeller mit dem modus ponens ausgedrückt:

Satz 2 (modus ponens)**.** *Für Aussagen A und B ist $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ immer wahr.*

Beweis. Das zeigen wir mit Hilfe einer Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

□

Beliebte falsche Schlüsse aus dem modus ponens sind:

- Wenn die Konklusion B gilt, so muss auch die Prämisse A gelten.
- Wenn die Prämisse A nicht gilt, so kann auch die Konklusion B nicht gelten.

Man betrachte hierzu die dazugehörigen Wahrheitstafeln (Übung!).

Der direkte Beweis

Die erste Beweistechnik haben wir bereits erschlossen: Der direkte Beweis. Beim direkten Beweis wird direkt (oder über wenige Umwege) von der Prämisse auf die Konklusion geschlossen, wir zeigen also **direkt**, dass $P \Rightarrow K$ wahr ist.
Für ein Beispiel eines direkten Beweises nehmen wir an, dass einige grundsätzliche Tatsachen über das Rechnen mit ganzen Zahlen bekannt sind, unter anderem verwenden wir unsere Definition 1 über gerade Zahlen und wollen damit folgenden Satz direkt beweisen:

Satz 3. *Ist n eine gerade Zahl, so ist auch n^2 gerade.*

oder auch (kompakter):

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n \text{ gerade } \Rightarrow n^2 \text{ gerade}$$

Wir wollen nun die Voraussetzungen und die Folgerungen identifizieren:
Voraussetzung: $n \in \mathbb{Z}, n$ gerade, also gibt es ein m, sodass $n = 2m$.
Zu zeigen: n^2 gerade, gesucht ist also eine ganze Zahl k, sodass $n^2 = 2k$.
Beweis: Aus der Voraussetzung wissen wir, dass $n = 2m$, also können wir umformen:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m)^2 \\ &= 4m^2 \\ &= 2\underbrace{(2m^2)}_{=:k} \\ &= 2k \end{aligned}$$

Wir sehen hier, dass wir nicht viel machen mussten; wir haben im Wesentlichen die Voraussetzung in den untersuchten Term eingesetzt und damit den Satz direkt bewiesen.
Es ist noch etwas anzumerken: Wir sollten eine Existenzaussage („Es existiert ein k, sodass…) beweisen und haben dies getan, indem wir eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften angegeben oder *konstruiert* haben. Solche Beweise nennt man aus naheliegenden Gründen „konstruktive Beweise" und sie sind die einfachere (aber nicht immer mögliche) Form, Existenzaussagen zu beweisen.
Als nächstes Beispiel zeigen wir den - vielleicht schon aus der Schule bekannten - kleinen Gauß.

Satz 4 (kleiner Gauß)**.** *Sei n eine natürliche Zahl, also $n \geq 1$. Dann gilt:*

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis. Wir betrachten dazu das zwei-fache der Summe $1 + \cdots + n$ und addieren diese geschickt auf:

$$\begin{array}{cc} 1 + \cdots + n & \\ + & \\ n + \cdots + 1 & = \\ (n+1) + \cdots + (n+1) & = \\ n(n+1) & \end{array}$$

Damit erhalten wir also

$$2(1 + \cdots + n) = n(n+1).$$

Durch zwei teilen liefert

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

das erwünschte Ergebnis. □

Gegenbeispiele

Unter einer für-alle Aussage verstehen wir eine Aussage der Form $\forall x : E(x)$, wobei E eine Eigenschaft ist und $E(x)$ bedeutet, dass x die Eigenschaft E erfüllt. Die Aussage bedeutet also, dass alle Objekte x die Eigenschaft E erfüllen. Will man zeigen, dass eine für-alle Aussage *falsch* ist, so genügt es ein *Gegenbeispiel* anzugeben. D.h. wir geben ein Objekt x an, so dass x *nicht* E erfüllt. Das beruht auf der Tatsache, dass $\neg\forall x : E(x)$ genau dann wahr ist, wenn $\exists x : \neg E(x)$ gilt. Eine für-alle Aussage ist also genau dann falsch, wenn es ein Objekt gibt, dass die Eigenschaft nicht erfüllt.
Wir geben wieder ein Beispiel. Dafür brauchen wir ein paar Definitionen.

Definition 5 (Teiler)**.** *Seien n und k ganze Zahlen. Dann heißt k **Teiler** von n, wir schreiben $k|n$, falls es eine ganze Zahl m gibt, so dass $n = km$.*

Definition 6 (Echter Teiler)**.** *Seien n und k natürliche Zahlen. Dann heißt k **echter Teiler** von n, falls k ein Teiler von n ist und $n \neq k$ gilt.*

Definition 7 (Primzahl)**.** *Eine natürliche Zahl $n \neq 1$ heißt **Primzahl**, wenn ihr einziger echter Teiler 1 ist.*

Satz 8. *Die folgende Aussage ist falsch: Für alle Primzahlen p gibt es eine ganze Zahl, so dass p von der Form $4k \pm 1$ ist.*

Beweis. Sei $E(p)$ die Eigenschaft gegeben durch p ist Primzahl und es gibt ein k so dass $p = 4k \pm 1$. Dann können wir unsere für-alle Aussage schreiben als: $\forall p : E(p)$. Wir wollen zeigen, dass diese falsch ist und konstruieren dafür ein Gegenbeispiel. Gesucht ist ein p, das nicht $E(p)$ erfüllt. Also eine Zahl die nicht gleichzeitig Primzahl und von der Form $4k \pm 1$ ist. Ein Gegenbeispiel ist die 2, denn:

- Die 2 ist eine Primzahl.
- Aber die 2 ist auch gerade, was Zahlen von der Form $4k \pm 1$ nicht sind.

Daher ist 2 eine Primzahl, die nicht von der Form $4k \pm 1$ ist. □

In den Übungen werden wir sehen, dass die Aussage 'Jede Primzahl p größer 2 ist von der Form $4k \pm 1$' wahr ist.
Ein häufiger Fehler ist es eine für-alle Aussage durch ein Beispiel zeigen zu wollen. Das ist so falsch wie es nur geht! In einer für-alle Aussage soll man eine Aussage zeigen, die *für alle* Objekte gilt, nicht nur für eins!

Indirekter Beweis

Wir betrachten folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Diese Schlussfigur

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

heißt **Kontraposition** und ist die Grundlage für den so genannten **Indirekten Beweis**.
Wir sehen also, dass wir statt $P \Rightarrow K$ auch $\neg K \Rightarrow \neg P$ zeigen können. Intuitiv ist das klar: Wenn ich weiß, dass die Straße nass ist, wenn es regnet, dann kann ich aus der Tatsache, dass die Straße trocken ist, schließen, dass es wohl nicht regnet. Wir betrachten ein Beispiel für einen indirekten Beweis und machen mit einigen Definitionen klar, worüber wir reden möchten:

Definition 9 (Perfekte Zahl)**.** *Eine natürliche Zahl n heißt **vollkommen**, oder **perfekt**, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist.*

Beispiele für perfekte Zahlen sind 6 und 28.

Satz 10. *Sei $n \in \mathbb{N}$ eine vollkommene Zahl. Dann ist n keine Primzahl.*

Beweis. Wir zeigen stattdessen die indirekte Aussage:

$$n \text{ Primzahl } \Rightarrow n \text{ nicht perfekt}$$

Sei n also eine Primzahl. Dann ist ihr einziger echter Teiler 1. Damit ist auch die Summe ihrer echten Teiler 1. Da $n \neq 1$ ist, ist sie nicht vollkommen. □

Widerspruchsbeweis

Widerspruchsbeweise sind ein mächtiges Werkzeug für eine_n Mathematiker_in. Sie beruhen auf der logischen Schlussfigur:

A	$\neg A$	$B \wedge \neg B$	$\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$
w	f	f	w
f	w	f	f

Wir sehen, dass, wenn wir gezeigt haben, dass $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)$ wahr ist, dass dann $\neg A$ falsch sein muss, also A wahr.
Wir zeigen also A, indem wir das Gegenteil annehmen und zeigen, dass wir daraus einen Widerspruch beweisen können. Da wir wissen, dass Widersprüche nie wahr sind, muss unsere Annahme falsch sein.
Wir betrachten wieder ein Beispiel:

Definition 11 (Rationale Zahl)**.** *Eine* ***rationale Zahl*** *ist eine Zahl, die sich als $\frac{p}{q}$ darstellen lässt, wobei p eine ganze Zahl und q eine ganze Zahl ungleich 0 ist.*

Satz 12. *Es existiert keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.*

Der Beweis dieses Satzes ist vergleichsweise lang. Daher werden wir zwei Lemmata, also Hilfssätze verwenden. Dafür brauchen wir wieder eine Definition.

Definition 13 (ungerade)**.** *Eine ganze Zahl n heißt* ***ungerade****, wenn eine ganze Zahl m existiert, sodass $n = 2m + 1$.*

Außerdem müssen wir ohne Beweis glauben (Ein Beweis bräuchte eine genaue Definition der ganzen Zahlen):

Satz 14. *Eine ganze Zahl ist entweder gerade, oder ungerade.*

Damit können wir nun unser Lemma formulieren, dass uns helfen soll, Satz 12 zu beweisen.

Lemma 15. *Ist das Quadrat einer ganzen Zahl gerade, dann auch die Zahl selbst. Oder kürzer: $\forall n \in \mathbb{Z}$:n^2 gerade $\Rightarrow n$ gerade.*

Beweis. Das zeigen wir indirekt. Wir zeigen also: n ungerade $\Rightarrow n^2$ ungerade. Sei n ungerade und $m \in \mathbb{Z}$, sodass $n = 2m + 1$. Dann ist

$$n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$$

Dies ist eine ungerade Zahl. □

Wir brauchen für den Beweis von Satz 12, allerdings noch einmal ein wenig mehr Informationen über die ganzen Zahlen. Wir wollen eine rationale Zahl a/b durch teilerfremde Zahlen c, d darstellen, also $a/b = c/d$. Hierfür brauchen wir die sogenannte **Primfaktorzerlegung**, kurz **PFZ**.

Definition 16 (Primfaktorzerlegung)**.** *Eine **Primfaktorzerlegung** einer ganzen Zahl z ist ein Produkt $\pm p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_n^{e_n} = z$ von Primzahlen $p_1, \dots, p_n$. Die $e_i \geq 1$ sind natürliche Zahlen, die angeben wie oft p_i die Zahl z teilt.*

Folgender Satz ist vielleicht aus der Schule bekannt. Er besagt, dass wir jede ganze Zahl als Produkt ihrer Primteiler schreiben können.

Satz 17. *Jede ganze Zahl z ungleich 0 hat eine (bis auf die Reihenfolge in der multipliziert wird) eindeutige Primfaktorzerlegung.*

Definition 18 (teilerfremd)**.** *Zwei ganze Zahlen n und m heißen **teilerfremd**, falls jede ganze Zahl k, die sowohl n also auch m teilt, schon von der Form $k = \pm 1$ ist.*

Wir können nun das zweite Lemma, das wir für Satz 12 brauchen, formulieren und beweisen.

Lemma 19. *Sei a/b eine rationale Zahl. Dann gibt es teilerfremde ganze Zahlen c und $d, d \neq 0$ sodass $a/b = c/d$.*

Beweis. Wir betrachten die Primfaktorzerlegung von a und b. Sei also $a = vp_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}$ und $b = wq_1^{f_1} \dots q_m^{f_m}$, wobei v und w Vorzeichen, also ± 1 sind, die $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m$ Primzahlen und $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m$ natürliche Zahlen. Es ist möglich, dass eines der p_i mit einem q_j übereinstimmt. In diesem Fall kürzen wir in a/b um die Anzahl der $p_i = q_j$ die a und b gemeinsam haben. Genauer kürzen wir durch $p_i^g = q_j^g$ wobei g eine natürliche Zahl, nämlich das Minimum von e_i und f_j, ist. Nach dem Kürzen all solcher Vorkommnisse erhalten wir Zahlen c und d, sodass $a/b = c/d$ und c, d keinen gemeinsamen Primteiler mehr haben. Ein gemeinsamer Teiler k von c und d hat damit die PFZ $k = \pm 1$ und c, d sind teilerfremd. □

Jetzt kommen wir zum Beweis von Satz 12:

Beweis. Angenommen, es existiert eine solche rationale Zahl. Dann existieren $m, n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\sqrt{2} = x = \frac{m}{n}$$

Wir können nach Lemma 19 annehmen, dass m und n teilerfremd sind.

$$\Rightarrow 2 = x^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow 2n^2 = m^2$$

D.h. m^2 ist eine gerade Zahl. Wegen Lemma 15 ist dann aber auch m gerade und es existiert ein k, sodass

$$m = 2k$$
$$\Rightarrow 2n^2 = m^2 = 4k^2$$
$$\Rightarrow n^2 = 2k^2$$

Damit ist nun auch n^2 gerade und damit n. Dass aber m und n beide gerade sind, widerspricht der Annahme der Teilerfremdheit. □

Damit haben wir für die vier großen Beweismethoden Beispiele gesehen. Nun gehen wir noch auf Spielarten von Beweisen ein, die an sich nichts Neues bringen, die aber selbst so häufig vorkommen, dass sie besondere Aufmerksamkeit verdienen.

Äquivalenzbeweis

In einem Äquivalenzbeweis möchte man zeigen, dass eine Aussage A genau dann wahr ist, wenn B wahr ist, also $A \Leftrightarrow B$. Dabei hilft uns die folgende Schlussfigur:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

D.h. um $A \Leftrightarrow B$ zu zeigen, zeigen wir $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$. Tatsächlich haben wir sowas bereits getan. Nehmen wir nämlich den Satz:

Satz 20. *Eine ganze Zahl n ist genau dann gerade, wenn n^2 gerade ist*

so ist der Beweis für uns schnell gemacht:

Beweis. $\Rightarrow$ Ist bereits in Satz 3 gezeigt.

$\Leftarrow$ Ist bereits in Lemma 15 gezeigt.

□

Ringschluss

Man kann das Prinzip des Äquivalenzbeweises ausweiten auf beliebig (aber endlich) viele weitere Aussagen durch den Schluss:

$$A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow ... \Rightarrow A_n \Rightarrow A_1$$

Durch den Schluss $A_n \Rightarrow A_1$ schließt man einen „Ring“ von Aussagen. Man kommt nun von jeder Aussage zu jeder anderen, indem man den Implikationspfeilen folgt, d.h. alle Aussagen

sind äquivalent. Dies ist häufig (Achtung! Nicht immer!) ein eleganter Weg, eine Mehrfach-Äquivalenz zu zeigen.
In der Praxis kommen die Aussagen natürlich selten in der richtigen Reihenfolge vor. Ist die Äquivalenz $A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow A_3$ zu zeigen, so kann es durchaus seien, dass man $A_2 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_2$ gut zeigen kann, aber dass $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \Rightarrow A_1$ deutlich schwerer zu zeigen ist.

Fallunterscheidungen

Eine besondere Beweisform ist der Beweis per Fallunterscheidung. Sie kann dann verwendet werden, wenn die Prämisse in die Form einer Disjunktion gebracht werden kann, also $P \Leftrightarrow P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_n$. In diesem Fall kann man sich die Aussagen P_1 bis P_n der Reihe nach als Prämissen nehmen und jeweils die Folgerung zeigen. Insgesamt ergibt sich dann $P \Rightarrow K$ (Das liegt daran, dass $([(A_1 \vee A_2) \Rightarrow B)] \Leftrightarrow [(A_1 \Rightarrow B) \wedge (A_2 \Rightarrow B)]$, wie man per Wahrheitstafel beweisen kann).
Ein Beispiel ist die Voraussetzung "Sei n eine ganze Zahl". Sie kann umgeschrieben werden in "Sei n eine gerade ganze Zahl oder eine ungerade ganze Zahl". Dann kann man im Beweis die Fälle n gerade und n ungerade gesondert betrachten. So auch in folgendem Beispiel:

Satz 21. *Für eine ganze Zahl n existiert eine ganze Zahl m, so dass n^2 von der Form $4m$ oder $4m + 1$ ist.*

Beweis. Erster Fall: n gerade. Dann existiert eine ganze Zahl k, so dass $n = 2k$. Dann ist $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Mit $m = k^2$ erhalten wir $n^2 = 4m$.

Zweiter Fall: n ungerade. Dann existiert eine ganze Zahl k, so dass $n = 2k + 1$. Unter Verwendung der binomischen Formel sehen wir $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$. Mit $m = k^2 + k$ erhalten wir $n^2 = 4m + 1$. □

Es ist besonders wichtig (und nicht immer einfach), dass **alle** möglichen auftretenden Fälle betrachtet werden. Ein häufiger Anfängerfehler ist, eine Fallunterscheidung zu machen, und dann einzelne Fälle zu vergessen (zum Beispiel unterscheidet man $x > 0$ und $x < 0$ und vergisst $x = 0$).

Eindeutigkeitsbeweis

Häufig kommt es vor, dass man zeigen will, dass es nur ein einziges Objekt gibt, welches bestimmte Eigenschaften aufweist, dass also dieses Objekt **eindeutig** durch diese Eigenschaften identifiziert wird. Die Aussage spaltet sich in zwei Teile: Einerseits soll es überhaupt ein Objekt geben (Existenz), andererseits auch höchstens eins (Eindeutigkeit). Die Existenz zeigt man von Fall zu Fall verschieden. Die Eindeutigkeit kann man aber häufig zeigen, indem man annimmt, man hätte ein zweites Objekt mit den gleichen Eigenschaften, von welchem man dann zeigt, dass es mit dem bereits vorhandenen übereinstimmt.

Definition 22. *Eine ganze Zahl e heißt* ***neutrales Element*** *der Addition, wenn für alle ganzen Zahlen x gilt:*

$$x + e = x$$

Wir wollen nun zeigen, dass es genau ein solches neutrales Element gibt.

Beweis. Zunächst einmal hat die Zahl 0 die geforderte Eigenschaft, also ist die Existenz gegeben. Angenommen also, wir haben zwei neutrale Elemente, die wir e und e' nennen. Dann gilt per Definition:

$$e + e' = e \wedge e' + e = e'$$

Wegen der Kommutativität der Addition gilt:

$$e + e' = e' + e$$

$$\Rightarrow e' = e$$

□

Abschließende Bemerkungen

Stil

Manche_r Anfänger_in versuchen, seitenlange Rechnungen voller möglichst komplizierter Symbole als Beweise abzugeben. Das ist so falsch, wie es nur geht. Ein guter Beweis ist so kurz wie möglich, sauber und einfach zu lesen und verstehen. Es geht bei Beweisen darum, anderen (und sich selbst) das enthaltene Wissen klar zu machen, es ist also ein Akt der Kommunikation und dazu gehört eben auch, verstanden zu werden.
Dabei ist es wichtig, klare Bezeichnungen zu benutzen. Gängig sind zum Beispiel folgende Konventionen:

$$m, n \in \mathbb{N}$$

$$i, j, k, l \in \mathbb{Z} \text{ (oder ebenfalls } \mathbb{N}\text{)}$$

$$p, q \in \mathbb{Q}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

Probleme des Widerspruchsbeweises

Der Widerspruchsbeweis ist tatsächlich nicht ganz so klar, wie hier dargestellt. Als Beispiel betrachten wir die Aussage, mit der ein Barbier seine Dienste bewirbt:

„Ich rasiere genau die, die sich nicht selbst rasieren“

Und fragen uns, wer ihn rasiert.
Nehmen wir an, dass er sich selbst rasiert. Da er Leute, die sich selbst rasieren nicht rasiert, rasiert er sich dann **nicht** selbst. Widerspruch.
Nehmen wir allerdings an, dass er sich nicht selbst rasiert. Nach eigener Aussage rasiert er aber ja jeden, der sich nicht selbst rasiert - also auch sich selbst. Ebenfalls ein Widerspruch.
Dies ist eine Variante der bekannten **Russelschen Antinomie**. Sie lässt sich auflösen, aber dazu muss man schon deutlich tiefer in die formale Logik und Mengentheorie einsteigen und die sogenannte naive Mengenlehre endgültig hinter sich lassen.

Folgerung aus Widerspruch

Hier soll noch ein Punkt genannt werden, der einen anfangs oft verwirrt - er wird häufig ausgedrückt als „Aus Widersprüchen lassen sich beliebige Aussagen folgern“. Der Grund dafür ist aus folgender Wahrheitstafel ersichtlich:

A	B	$A \wedge \neg A$	$(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$
w	w	f	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	w

Wir sehen hier, dass, obwohl $A \wedge \neg A$ immer falsch ist, dass die Implikation immer wahr ist. Daraus ist aber nicht zu folgern, dass B wahr ist, im Gegenteil. Der Wahrheitswert von B hat überhaupt keinen Einfluss auf die Wahrheitstafel, B kann sowohl wahr als auch falsch sein. Was gemeint ist, wenn gesagt wird, aus Widersprüchen lassen sich beliebige Aussagen folgern, ist, dass die Folgerung korrekt ist, dass also die Implikation wahr ist.

Zirkelschluss

Häufig kommt es unbewusst vor, dass man, im Versuch, einen Satz zu zeigen, diesen bereits voraussetzt. Meistens ist ein solcher Zirkelschluss gut versteckt und nicht offensichtlich. Um Zirkelschlüsse zu vermeiden, hilft nur sauberes Vorgehen und leider vor allem Übung.