Verknüpfungen

Feline Bailer

Universität Heidelberg

10.10.2024

Inhaltsverzeichnis

6.1 Allgemeines

6.1.1 Definition: Verknüpfung

Eine **Verknüpfung** ist eine Abbildung:

$$* : X \times X \to X,$$

wobei X eine Menge ist.

Der Funktionswert von $x, y \in X$ unter der Verknüpfung $*$ wird als $x * y$ notiert (statt $*(x, y)$).

6.1.4 - 6.1.6 Beispiele für Verknüpfungen

- Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf $\mathbb{R}$:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

$$- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x - y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

$$/ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x/y$$

6.1.4 - 6.1.6 Beispiele für Verknüpfungen

- Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf $\mathbb{R}$:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

$$- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x - y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

$$/ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x/y$$

Funktioniert das Gleiche auch auf $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{N}$?

6.1.4 - 6.1.6 Beispiele für Verknüpfungen

- Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf $\mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto x + y \\
- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto x - y \\
\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto x \cdot y \\
/ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto x/y
\end{aligned}
$$

- Verknüpfung auf Abb(M) :

$$\circ : \mathrm{Abb}(M) \times \mathrm{Abb}(M) \to \mathrm{Abb}(M), \quad (g, f) \mapsto g \circ f$$

6.1.4 - 6.1.6 Beispiele für Verknüpfungen

- Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf $\mathbb{R}$:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$
$$- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x - y$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$
$$/ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x/y$$

- Verknüpfung auf Abb(M) :

$$\circ : \mathrm{Abb}(M) \times \mathrm{Abb}(M) \to \mathrm{Abb}(M), \quad (g, f) \mapsto g \circ f$$

- Schnitt und Vereinigung auf der Potenzmenge $P(M)$:

$$\cap : P(M) \times P(M) \to P(M), \quad (A, B) \mapsto A \cap B$$
$$\cup : P(M) \times P(M) \to P(M), \quad (A, B) \mapsto A \cup B$$

6.1.10 Definition: Eingeschränkte Verknüfung

Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X.
Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **abgeschlossen unter der Verknüpfung** $*$, wenn für alle $x, y \in U$ auch $x * y \in U$ ist.

6.1.10 Definition: Eingeschränkte Verknüfung

Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X.
Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **abgeschlossen unter der Verknüpfung** $*$, wenn für alle $x, y \in U$ auch $x * y \in U$ ist.

In diesem Fall ist durch

$$*|_U : U \times U \to U, \quad (u, v) \mapsto u * v$$

eine Verknüpfung auf U definiert, die **Einschränkung von** $*$ **auf** U oder auch die **von** X **vererbte Verknüpfung**.

6.1.11 Beispiele für eingeschränkte Verknüpfungen

- Addition auf $\mathbb{Z}$ als Einschränkung der Addition auf $\mathbb{R}$: Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen unter der Addition.

6.1.11 Beispiele für eingeschränkte Verknüpfungen

- Addition auf $\mathbb{Z}$ als Einschränkung der Addition auf $\mathbb{R}$: Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen unter der Addition.
- Division auf $\mathbb{Q}$ als Einschränkung der Division auf $\mathbb{R}$: Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist abgeschlossen unter der Division.

6.1.11 Beispiele für eingeschränkte Verknüpfungen

- Addition auf $\mathbb{Z}$ als Einschränkung der Addition auf $\mathbb{R}$: Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen unter der Addition.
- Division auf $\mathbb{Q}$ als Einschränkung der Division auf $\mathbb{R}$: Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist abgeschlossen unter der Division.
- Division auf $\mathbb{Z}$ ist **keine** Einschränkung der Division auf $\mathbb{R}$: Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist **nicht** abgeschlossen unter der Division.

6.2 Assoziativ- und Kommutativgesetz

6.2.1 Definition: Assoziativ- und Kommutativgesetz

Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X.

- Die Verknüpfung $*$ heißt **assoziativ**, falls für alle $x, y, z \in X$ das Assoziativgesetz gilt:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

6.2.1 Definition: Assoziativ- und Kommutativgesetz

Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X.

- Die Verknüpfung $*$ heißt **assoziativ**, falls für alle $x, y, z \in X$ das Assoziativgesetz gilt:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

- Zwei Elemente $x, y \in X$ **kommutieren**, wenn $x * y = y * x$.

6.2.1 Definition: Assoziativ- und Kommutativgesetz

Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X.

- Die Verknüpfung $*$ heißt **assoziativ**, falls für alle $x, y, z \in X$ das Assoziativgesetz gilt:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

- Zwei Elemente $x, y \in X$ **kommutieren**, wenn $x * y = y * x$.
- Die Verknüpfung $*$ heißt **kommutativ**, falls für alle $x, y \in X$ das Kommutativgesetz gilt:

$$x * y = y * x$$

6.2.1 Definition: Assoziativ- und Kommutativgesetz

Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X.

- Die Verknüpfung $*$ heißt **assoziativ**, falls für alle $x, y, z \in X$ das Assoziativgesetz gilt:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

- Zwei Elemente $x, y \in X$ **kommutieren**, wenn $x * y = y * x$.
- Die Verknüpfung $*$ heißt **kommutativ**, falls für alle $x, y \in X$ das Kommutativgesetz gilt:

$$x * y = y * x$$

Welche von den vorherigen Beispielen sind assoziativ / kommutativ? Welche nicht?

6.2.5 Bedeutung des Assoziativgesetzes

Das Assoziativgesetz besagt, dass bei assoziativen Verknüpfungen jede Klammerung auf dasselbe Ergebnis hinausläuft. Daher können wir die Klammern weglassen.

Zum Beispiel:

$$(x * y) * z = x * (y * z) = x * y * z$$

Die Aussage gilt auch für beliebig viele Elemente, hier $a, b, c, d, e \in X$:

$$(a * (b * c)) * (d * e) = ((((a * b) * c) * d) * e) = a * b * c * d * e$$

6.3 Monoide

6.3.1 Definition: Neutrales Element

Seien X eine Menge und $*$ eine zweistellige Verknüpfung auf X.
Ein Element $e \in X$ heißt **neutrales Element**, falls für alle $x \in X$ gilt:

$$e * x = x \quad \text{(linksneutral)} \quad \text{und} \quad x * e = x \quad \text{(rechtsneutral)}.$$

Beispiele neutrales Element

- Die Zahl 0 ist das neutrale Element der Addition auf $\mathbb{R}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$0 + x = x \quad \text{und} \quad x + 0 = x.$$

Beispiele neutrales Element

- Die Zahl 0 ist das neutrale Element der Addition auf $\mathbb{R}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$0 + x = x \quad \text{und} \quad x + 0 = x.$$

- Die Zahl 1 ist das neutrale Element der Multiplikation auf $\mathbb{R}$:

$$1 \cdot x = x \quad \text{und} \quad x \cdot 1 = x.$$

Beispiele neutrales Element

- Die Zahl 0 ist das neutrale Element der Addition auf $\mathbb{R}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$0 + x = x \quad \text{und} \quad x + 0 = x.$$

- Die Zahl 1 ist das neutrale Element der Multiplikation auf $\mathbb{R}$:

$$1 \cdot x = x \quad \text{und} \quad x \cdot 1 = x.$$

Sind 0 bzw. 1 auch neutrale Elemente der Subtraktion bzw. Division?

Beispiele neutrales Element

- Die Zahl 0 ist das neutrale Element der Addition auf $\mathbb{R}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$0 + x = x \quad \text{und} \quad x + 0 = x.$$
- Die Zahl 1 ist das neutrale Element der Multiplikation auf $\mathbb{R}$:
$$1 \cdot x = x \quad \text{und} \quad x \cdot 1 = x.$$
- Das Verketten von Abbildungen aus $\mathrm{Abb}(M, M)$ hat die Identität id_M als neutrales Element. Denn für jede Abbildung $M \xrightarrow{f} M$ gilt::
$$f \circ \mathrm{id}_M = f \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_M \circ f = f$$

Beispiele neutrales Element

- Sei M eine beliebige Menge. Bezüglich der Verknüpfung $\cap$ hat $\mathcal{P}(M)$ das neutrale Element M. Denn es gilt:

$$M \cap A = A \cap M = A \quad \text{für jede Teilmenge } A \subseteq M$$

Beispiele neutrales Element

- Sei M eine beliebige Menge. Bezüglich der Verknüpfung $\cap$ hat $\mathcal{P}(M)$ das neutrale Element M. Denn es gilt:

$$M \cap A = A \cap M = A \quad \text{für jede Teilmenge } A \subseteq M$$

- Bezüglich der Verknüpfung $\cup$ hat $\mathcal{P}(M)$ das neutrale Element $\varnothing$. Denn es gilt:

$$\varnothing \cup A = A \cup \varnothing = A \quad \text{für jede Teilmenge } A \subseteq M$$

6.3.3 Satz: Eindeutigkeit neutraler Elemente

Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X.
Sofern X bezüglich $*$ ein neutrales Element enthält, ist dieses eindeutig bestimmt.

6.3.3 Satz: Eindeutigkeit neutraler Elemente

Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X.
Sofern X bezüglich $*$ ein neutrales Element enthält, ist dieses eindeutig bestimmt.
Beweis: Es seien $d, e \in X$ zwei neutrale Elemente. Dann gilt:

$$d = d * e \quad (\text{da } e \text{ neutral ist}) = e \quad (\text{da } d \text{ neutral ist}).$$

Damit ist $d = e$ bewiesen.

6.3.6 Definition: Monoid

Ein **Monoid** ist ein Paar $(M, *)$, bestehend aus einer Menge M und einer Verknüpfung $*$ auf M, für die gilt:

- **(M1)**: $*$ ist assoziativ, d.h. für alle $x, y, z \in M$ gilt:
$$(x * y) * z = x * (y * z).$$
- **(M2)**: M enthält ein neutrales Element.

6.3.6 Definition: Monoid

Ein **Monoid** ist ein Paar $(M, *)$, bestehend aus einer Menge M und einer Verknüpfung $*$ auf M, für die gilt:

- **(M1)**: $*$ ist assoziativ, d.h. für alle $x, y, z \in M$ gilt:
$$(x * y) * z = x * (y * z).$$
- **(M2)**: M enthält ein neutrales Element.

Ist $*$ zusätzlich noch kommutativ, heißt $(M, *)$ **kommutatives Monoid**.

6.3.7 Beispiele für Monoide

Beispiele:

- $(\mathbb{N}_0, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sind kommutative Monoide mit dem neutralen Element 0.

6.3.7 Beispiele für Monoide

Beispiele:

- $(\mathbb{N}_0, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sind kommutative Monoide mit dem neutralen Element 0.
- $(\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{R}, \cdot), (\mathbb{C}, \cdot)$ sind kommutative Monoide mit dem neutralen Element 1.

6.3.7 Beispiele für Monoide

Beispiele:

- $(\mathbb{N}_0, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sind kommutative Monoide mit dem neutralen Element 0.
- $(\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{R}, \cdot), (\mathbb{C}, \cdot)$ sind kommutative Monoide mit dem neutralen Element 1.
- $(\mathrm{Abb}(M, M), \circ)$ ist ein Monoid mit dem neutralen Element id_M. Es ist jedoch im Allgemeinen nicht kommutativ.

6.3.7 Beispiele für Monoide

Beispiele:

- $(\mathbb{N}_0,+),(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+)$ sind kommutative Monoide mit dem neutralen Element 0.
- $(\mathbb{N},\cdot),(\mathbb{Z},\cdot),(\mathbb{Q},\cdot),(\mathbb{R},\cdot),(\mathbb{C},\cdot)$ sind kommutative Monoide mit dem neutralen Element 1.
- $(\mathrm{Abb}(M,M),\circ)$ ist ein Monoid mit dem neutralen Element id_M. Es ist jedoch im Allgemeinen nicht kommutativ.
- Ist M eine beliebige Menge, so sind $(\mathcal{P}(M),\cup)$ und $(\mathcal{P}(M),\cap)$ zwei kommutative Monoide mit den jeweiligen neutralen Elementen $\varnothing$ und M.

6.3.7 Beispiele für Monoide

Beispiele:

- $(\mathbb{N}_0, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sind kommutative Monoide mit dem neutralen Element 0.
- $(\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{R}, \cdot), (\mathbb{C}, \cdot)$ sind kommutative Monoide mit dem neutralen Element 1.
- $(\mathrm{Abb}(M, M), \circ)$ ist ein Monoid mit dem neutralen Element id_M. Es ist jedoch im Allgemeinen nicht kommutativ.
- Ist M eine beliebige Menge, so sind $(\mathcal{P}(M), \cup)$ und $(\mathcal{P}(M), \cap)$ zwei kommutative Monoide mit den jeweiligen neutralen Elementen $\varnothing$ und M.
- Die Addition „$+$“ ist zwar eine assoziative Verknüpfung auf der Menge $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$, aber $(\mathbb{N}_{\geqslant 1}, +)$ ist kein Monoid, da es kein neutrales Element enthält.

6.3.10 Definition: Inverse Elemente

Sei X eine Menge mit einer zweistelligen Verknüpfung $*$, die ein neutrales Element e besitzt und sei $a \in X$. Ein Element $b \in X$ heißt **invers** zu a, falls es die folgenden beiden Inversengleichungen erfüllt:

$$a * b = e \quad \text{(rechtsinvers)}$$

$$b * a = e \quad \text{(linksinvers)}$$

Das Element a heißt **invertierbar** (oder auch: Einheit), falls es ein zu a inverses Element in X gibt.

6.3.12 Beispiele für Inverse Elemente

Beispiele:

- In den Monoiden $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ ist jedes Element invertierbar.

$$x + (-x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

6.3.12 Beispiele für Inverse Elemente

Beispiele:

- In den Monoiden $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ ist jedes Element invertierbar.

$$x + (-x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Das einzige invertierbare Element im Monoid $(\mathbb{N}_0, +)$ ist die 0.

6.3.12 Beispiele für Inverse Elemente

Beispiele:

- In den Monoiden $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ ist jedes Element invertierbar.

$$x + (-x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Das einzige invertierbare Element im Monoid $(\mathbb{N}_0, +)$ ist die 0.
- In den Monoiden $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, \cdot)$ ist jedes Element, außer 0, invertierbar.

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1, \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

0 ist nicht invertierbar, da für jede Zahl x: $0 \cdot x = 0 \neq 1$.

6.3.14 Satz: Eindeutigkeit inverser Elemente

Seien $(M, *)$ ein Monoid und $a \in M$ ein invertierbares Element. Dann ist das inverse Element von a eindeutig bestimmt.

6.3.14 Satz: Eindeutigkeit inverser Elemente

Seien $(M, *)$ ein Monoid und $a \in M$ ein invertierbares Element. Dann ist das inverse Element von a eindeutig bestimmt. **Beweis:** Es seien $b, c \in M$ zwei beliebige Inverse zu a. Dann gilt:

$$b = b * e \quad (\text{da } e \text{ neutral ist})$$

$$= b * a * c \quad (\text{da } c \text{ invers zu } a \text{ ist})$$

$$= e * c \quad (\text{da } b \text{ invers zu } a \text{ ist}) = c \quad (\text{da } e \text{ neutral ist})$$

6.3.18 Satz: Rechenregeln für inverse Elemente

Sei $(M, *)$ ein Monoid mit neutralem Element $e \in M$. Dann gilt:

- a) Das neutrale Element ist invertierbar und es ist $e^{-1} = e$.

6.3.18 Satz: Rechenregeln für inverse Elemente

Sei $(M, *)$ ein Monoid mit neutralem Element $e \in M$. Dann gilt:

- a) Das neutrale Element ist invertierbar und es ist $e^{-1} = e$.
- b) Ist $a \in M$ ein invertierbares Element, so ist auch a^{-1} invertierbar und es gilt:

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

6.3.18 Satz: Rechenregeln für inverse Elemente

Sei $(M, *)$ ein Monoid mit neutralem Element $e \in M$. Dann gilt:

- a) Das neutrale Element ist invertierbar und es ist $e^{-1} = e$.
- b) Ist $a \in M$ ein invertierbares Element, so ist auch a^{-1} invertierbar und es gilt:

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

- c) (Regel von Hemd und Jacke) Sind $a, b \in M$ zwei invertierbare Elemente, so ist auch $a * b$ invertierbar und es gilt:

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

6.3.18 Satz: Rechenregeln für inverse Elemente

Sei $(M, *)$ ein Monoid mit neutralem Element $e \in M$. Dann gilt:

- a) Das neutrale Element ist invertierbar und es ist $e^{-1} = e$.
- b) Ist $a \in M$ ein invertierbares Element, so ist auch a^{-1} invertierbar und es gilt:

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

- c) (Regel von Hemd und Jacke) Sind $a, b \in M$ zwei invertierbare Elemente, so ist auch $a * b$ invertierbar und es gilt:

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

6.4 Mehr Notation

6.4.1 Additive und multiplikative Verknüpfungen

- **Additiv:** Verknüpfungen, die mit + notiert werden.

  $$a + b \text{ heißt Summe}, \quad a, b \text{ heißen Summanden.}$$

  Neutrales Element wird als $\mathbf{0}$ oder 0_X notiert.

6.4.1 Additive und multiplikative Verknüpfungen

- **Additiv:** Verknüpfungen, die mit + notiert werden.

  $$a + b \text{ heißt Summe,} \quad a, b \text{ heißen Summanden.}$$

  Neutrales Element wird als **0** oder 0_X notiert.

  Konvention: Verwendung nur für kommutative Verknüpfungen

- **Multiplikativ:** Verknüpfungen, die mit $\cdot$ oder ohne Zeichen notiert werden.

  $$a \cdot b = ab \text{ heißt Produkt,} \quad a, b \text{ heißen Faktoren.}$$

  Neutrales Element wird als **1** oder 1_X notiert.

6.4.1 Additive und multiplikative Verknüpfungen

- **Additiv:** Verknüpfungen, die mit + notiert werden.

  $$a + b \text{ heißt Summe}, \quad a, b \text{ heißen Summanden.}$$

  Neutrales Element wird als **0** oder 0_X notiert.

  Konvention: Verwendung nur für kommutative Verknüpfungen

- **Multiplikativ:** Verknüpfungen, die mit $\cdot$ oder ohne Zeichen notiert werden.

  $$a \cdot b = ab \text{ heißt Produkt}, \quad a, b \text{ heißen Faktoren.}$$

  Neutrales Element wird als **1** oder 1_X notiert.

Aufpassen: 0 und 1 müssen nicht den rellen Zahlen 0 und 1 entsprechen!

6.4.3 Differenzen - bei einer additiven Verknüpfung

- In einer additiven Verknüpfung wird das Inverse eines Elements a mit $-a$ notiert.

6.4.3 Differenzen - bei einer additiven Verknüpfung

- In einer additiven Verknüpfung wird das Inverse eines Elements a mit $-a$ notiert.
- Für $b + (-a)$ schreiben wir $b - a$ (**Differenz**)

6.4.3 Differenzen - bei einer additiven Verknüpfung

- In einer additiven Verknüpfung wird das Inverse eines Elements a mit $-a$ notiert.
- Für $b + (-a)$ schreiben wir $b - a$ (**Differenz**)
- Inversengleichungen in dieser Notation:

$$a - a = 0 \quad \text{und} \quad -a + a = 0$$

6.4.12: Mehrfachprodukte

Sei M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $*$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leqslant n$ und $a_m, \ldots, a_n \in M$ schreibt man

$$\ast_{k=m}^{n} a_k := a_m * \cdots * a_n.$$

Es heißen

- k die **Laufvariable**.
- m der **Startwert** der Laufvariable.
- n der **Endwert** der Laufvariable.

6.4.12: Beispiele

Seien $M_1, \ldots M_n$ Mengen. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant n$ schreibt man

- $\bigcap_{i=1}^{n} M_i := \bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} M_i = M_1 \cap \cdots \cap M_n$
- $\bigcup_{i=1}^{n} M_i := \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} M_i = M_1 \cup \cdots \cup M_n$

Für additiv und multiplikativ geschriebene Verknüpfungen gibt es Sonderzeichen:

- Additiv geschriebenen Verknüpfung:großes Sigma Σ (abkürzend für„Summe“):

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + \cdots + a_n$$

- Multiplikativ geschriebenen Verknüpfung: großes Pi Π (abkürzend für „Produkt“):

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot \cdots \cdot a_n$$

6.4.12: leeres Produkt

Falls M ein neutrales Element e zur Verknüpfung $*$ enthält, sind Mehrfachprodukte auch für den Fall $m > n$ (dh. gar keine Indizes zwischen Start- und Endwert der Laufvariable) erklärt.

In diesem Fall ist

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := e \quad (\text{falls } m > n)$$

das neutrale Element.

Ist überdies M ein kommutatives Monoid, so können Mehrfachprodukte über beliebige Familien mit endlichen Indexmengen gebildet werden: Ist I eine Menge, die nur endlich viele Elemente enthält, und ist $(a_i)_{i \in I}$ eine durch I indizierte Familie von Elementen aus M, so bezeichnet

$$\underset{i \in I}{\ast} a_i \quad \text{bzw. im additiven Fall:} \quad \sum_{i \in I} a_i \quad \text{bzw. im multiplikativen Fall:} \quad \prod_{i \in I}$$

die Verknüpfung der a_i's in einer beliebigen (irrelevanten, da $\ast$ kommutativ ist) Reihenfolge.

6.5 Gruppen

6.5.1 Definition: Gruppe

Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem jedes Element invertierbar ist. Konkret: $(G, *)$ ist eine Gruppe, wenn die folgenden Axiome gelten:

1. **Assoziativität**: Für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a * b) * c = a * (b * c)$.
2. **Neutrales Element**: Es gibt ein $e \in G$, so dass für alle $a \in G$ gilt $e * a = a * e = a$.
3. **Inverses Element**: Für jedes $a \in G$ gibt es ein $a^{-1} \in G$ so dass $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

6.5.1 Definition: Gruppe

Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem jedes Element invertierbar ist. Konkret: $(G, *)$ ist eine Gruppe, wenn die folgenden Axiome gelten:

1. **Assoziativität**: Für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a * b) * c = a * (b * c)$.
2. **Neutrales Element**: Es gibt ein $e \in G$, so dass für alle $a \in G$ gilt $e * a = a * e = a$.
3. **Inverses Element**: Für jedes $a \in G$ gibt es ein $a^{-1} \in G$ so dass $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Wenn zusätzlich die Verknüpfung kommutativ ist, also $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$, nennt man die Gruppe **abelsch**.

6.5.2 Beispiele für Gruppen

- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sind abelsche Gruppen.
- $(\mathbb{N}_0, +)$ ist kein Gruppe, da Elemente wie $5 \in \mathbb{N}_0$ kein Inverses besitzen.
- Falls X eine Menge mit mindestens zwei Elementen ist, dann ist $(\mathrm{Abb}(X, X), \circ)$ keine Gruppe, da nicht alle Abbildungen invertierbar sind.

6.5.4 Definition: Einheitengruppe eines Monoids

Sei M ein Monoid.
Die Teilmenge $M^{\times} = \{a \in M | a \text{ ist invertierbar}\}$ heißt die **Einheitengruppe** von M.

6.5.4 Definition: Einheitengruppe eines Monoids

Sei M ein Monoid.
Die Teilmenge $M^\times = \{a \in M | a \text{ ist invertierbar}\}$ heißt die **Einheitengruppe** von M.
Diese Menge bildet eine Gruppe mit der eingeschränkten Verknüpfung von M.

6.5.5 Satz: Einheitengruppe eines Monoids

Sei $(M, *)$ ein Monoid. Dann ist $M^\times$ unter der Verknüpfung $*$ abgeschlossen und bildet eine Gruppe.

- **Abgeschlossenheit**: Für alle $a, b \in M^\times$ ist auch $a * b \in M^\times$.
- **Assoziativität**: Die Verknüpfung $*$ ist auch auf $M^\times$ assoziativ.
- **Neutrales Element**: Das neutrale Element $e \in M$ liegt in $M^\times$.
- **Inverse**: Für jedes $a \in M^\times$ ist auch $a^{-1} \in M^\times$.

6.5.7 Beispiele für Einheitengruppen

- Die Einheitengruppe von $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- Die Einheitengruppe von $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist $\{1, -1\}$.
- Die Einheitengruppe von $(\mathbb{N}_0, +)$ ist $\{0\}$.